Staatliche Berufsoberschule Nürnberg

Daniel Körner: koerner@bos-n.de

Webinar am 19. Mai 2021

Analytische Geometrie: Abstandsberechnungen im $\mathbb{R}^3$

1. In einem Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ ist der Punkt $P(-2|0|10)$ gegeben.

   Berechnen Sie den Abstand des Punktes P zur Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$.

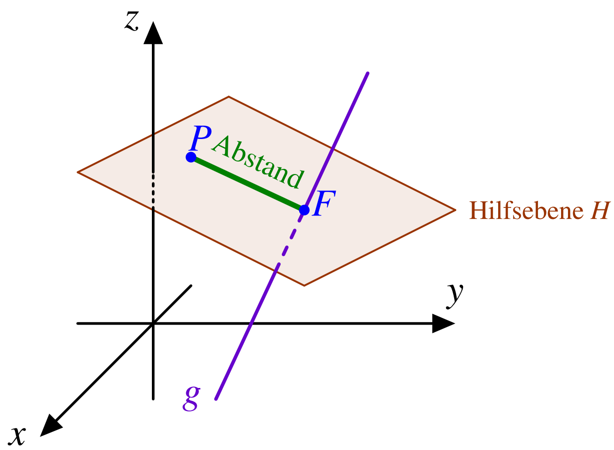
2. Berechnen Sie den Abstand des Punktes $Q(2|2|4)$ zur Ebene $E: x+y+z=5$.

1. In einem Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ ist der Punkt $P(-2|0|10)$ gegeben.

   Berechnen Sie den Abstand des Punktes P zur Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$.

   Erstelle Hilfsebene H, die senkrecht zur Geraden g verläuft und den Punkt P beinhaltet. Das heißt, dass der Richtungsvektor der Geraden der Normalenvektor der Ebene H ist.

   $H: \quad 3x - 2y + 4z = C$ mit $C \in \mathbb{R}$



   Die Ebene H soll den Punkt $P(-2|0|10)$ beinhalten. Setze Koordinaten in H ein, um C zu bestimmen:

   $H: \quad 3 \cdot (-2) - 2 \cdot 0 + 4 \cdot 10 = \underbrace{34}_{C}$

   Also ist $H: 3x - 2y + 4z = 34$

   Der Abstand zwischen dem Punkt P und der Geraden g ist der Abstand zwischen P und dem Lotfußpunkt F als Schnittpunkt zwischen H und g.

Schnittpunkt / Lotfußpunkt $F = H \cap g$:

$$
\begin{aligned}
H \cap g: \quad 3(-1+3\lambda)-2(2-2\lambda)+4(3+4\lambda) &= 34 \\
-3+9\lambda-4+4\lambda+12+16\lambda &= 34 \\
29\lambda &= 29 \\
\lambda &= \mathbf{1}
\end{aligned}
$$

$\lambda = 1$ in Gleichung von g einsetzen, um F zu erhalten:

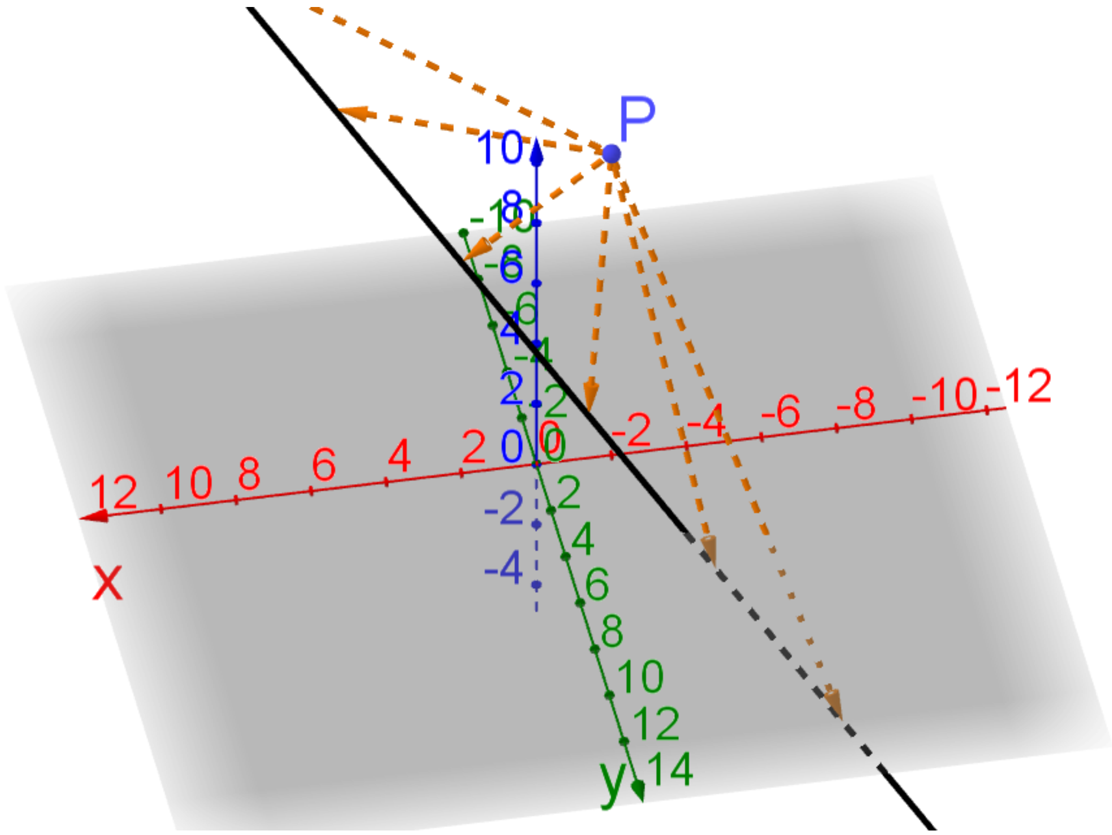
$\overrightarrow{OF} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$

Lotfußpunkt $F(2|0|7)$

Abstand von P zu g ist gleich der Länge des Verbindungsvektors $\overrightarrow{PF}$:

$\left|\overrightarrow{PF}\right| = \left|\begin{pmatrix} 2-(-2) \\ 0-0 \\ 7-10 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{4^2+0^2+(-3)^2} = \sqrt{25} = 5$

Der Abstand des Punktes P zur Geraden g beträgt 5 Längeneinheiten.



Andere Methode zur Berechnung des Abstandes:

Der Verbindungsvektor zwischen dem Punkt P und einem Punkt G auf der Geraden g muss senkrecht zum Richtungsvektor $\vec{u}$ der Geraden sein.

Das Skalarprodukt der beiden Vektoren muss als Bedingung Null ergeben:

$$\boxed{\overrightarrow{PG} \circ \vec{u} = 0}$$

Alle Punkte G auf der Geraden g können durch den Ortsvektor $\vec{x}$ der Geraden in Abhängigkeit von λ beschrieben werden:

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+3\lambda \\ 2-2\lambda \\ 3+4\lambda \end{pmatrix}$$

Als Punkt G in die Gleichung $\overrightarrow{PG} \circ \vec{u} = 0$ eingesetzt:

$$\begin{pmatrix} -1+3\lambda-(-2) \\ 2-2\lambda-0 \\ 3+4\lambda-10 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1+3\lambda \\ 2-2\lambda \\ -7+4\lambda \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$$

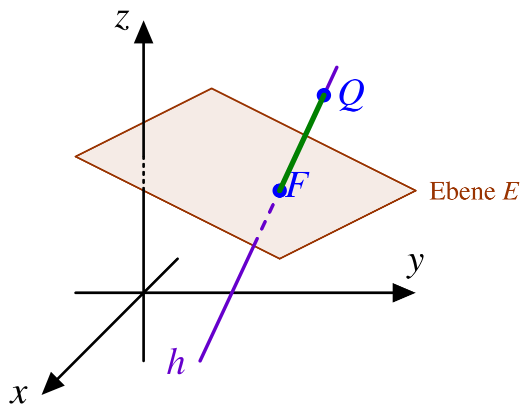
$$3+9\lambda-4+4\lambda-28+16\lambda = 0$$

$$29\lambda = 29$$

$$\boxed{\lambda = 1}$$

$$\vdots$$

2. Berechnen Sie den Abstand des Punktes $Q(2|2|4)$ zur Ebene $E: x+y+z=5$.



Der Abstand des Punktes Q zur Ebene E entspricht der Länge der zur E senkrechten Strecke zwischen Q und dem Schnittpunkt F zwischen der Hilfsgeraden h und E.

Hilfsgerade h: Aufpunktvektor ist der Ortsvektor von Q, der Richtungsvektor ist der Normalenvektor von E.

$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $\mu \in \mathbb{R}$.

Schneide h mit E:

$$\begin{aligned} h \cap E = F: \quad (2+\mu)+(2+\mu)+(4+\mu) &= 5 \\ 8+3\mu &= 5 \\ 3\mu &= -3 \\ \mu &= -1 \end{aligned}$$

Das heißt, dass der Abstand von Q zu E gleich der Länge des Richtungsvektors von h ist. Man muss von Q einmal den Richtungsvektor „nach unten" wegen des negativen Vorzeichens gehen, um beim Punkt F in der Ebene E zu landen.

$$d(Q;E) = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3} \approx 1{,}73$$

Der Abstand von Q zu E beträgt $\sqrt{3}$ Längeneinheiten.