

# Staatliche Berufsoberschule Nürnberg



Daniel Körner: koerner@bos-n.de

Webinar am 10. Juni 2020

---

## Analytische Geometrie: Abstandsberechnungen im $\mathbb{R}^3$

---

1. In einem Koordinatensystem des  $\mathbb{R}^3$  ist der Punkt  $P(-2|0|10)$  gegeben.

Berechnen Sie den Abstand des Punktes  $P$  zur Geraden  $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$  mit  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

2. Berechnen Sie den Abstand des Punktes  $Q(2|2|4)$  zur Ebene  $E : x + y + z = 5$ .

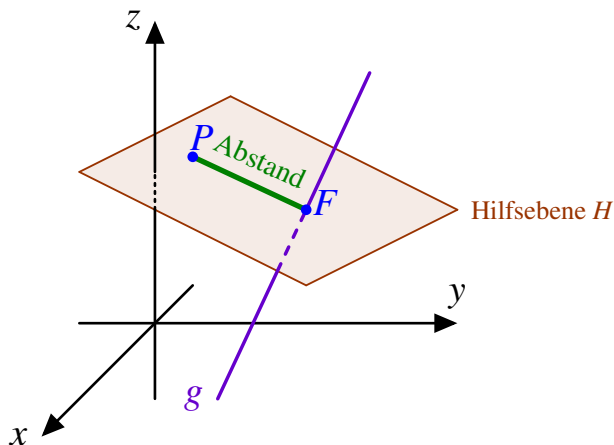
1. In einem Koordinatensystem des  $\mathbb{R}^3$  ist der Punkt  $P(-2|0|10)$  gegeben.

Berechnen Sie den Abstand des Punktes  $P$  zur Geraden  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

mit  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Erstelle Hilfsebene  $H$ , die senkrecht zur Geraden  $g$  verläuft und den Punkt  $P$  beinhaltet. Das heißt, dass der Richtungsvektor der Geraden der Normalenvektor der Ebene  $H$  ist.

$H: 3x - 2y + 4z = C$  mit  $C \in \mathbb{R}$



Die Ebene  $H$  soll den Punkt  $P(-2|0|10)$  beinhalten. Setze Koordinaten in  $H$  ein, um  $C$  zu bestimmen:

$$H: 3 \cdot (-2) - 2 \cdot 0 + 4 \cdot 10 = \underbrace{34}_C$$

Also ist  $H: 3x - 2y + 4z = 34$

Der Abstand zwischen dem Punkt  $P$  und der Geraden  $g$  ist der Abstand zwischen  $P$  und dem Lotfußpunkt  $F$  als Schnittpunkt zwischen  $H$  und  $g$ .

Schnittpunkt / Lotfußpunkt  $F = H \cap g$ :

$$H \cap g: \quad 3(-1 + 3\lambda) - 2(2 - 2\lambda) + 4(3 + 4\lambda) = 34$$

$$-3 + 9\lambda - 4 + 4\lambda + 12 + 16\lambda = 34$$

$$29\lambda = 29$$

$$\lambda = 1$$

$\lambda = 1$  in Gleichung von  $g$  einsetzen, um  $F$  zu erhalten:

$$\vec{OF} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$

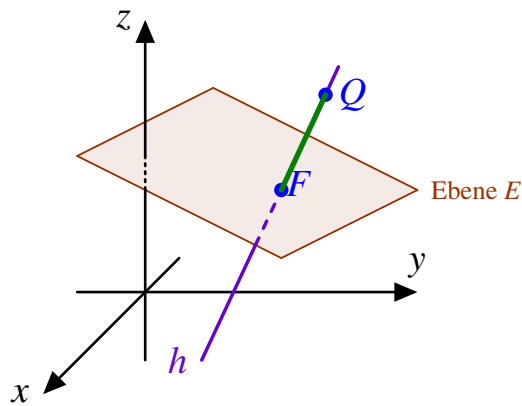
Lotfußpunkt  $F(2|0|7)$

Abstand von  $P$  zu  $g$  ist gleich der Länge des Verbindungsvektors  $\vec{PF}$ :

$$|\vec{PF}| = \left| \begin{pmatrix} 2 - (-2) \\ 0 - 0 \\ 7 - 10 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4^2 + 0^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5$$

Der Abstand des Punktes  $P$  zur Geraden  $g$  beträgt **5** Längeneinheiten.

2. Berechnen Sie den Abstand des Punktes  $Q(2|2|4)$  zur Ebene  $E : x + y + z = 5$ .



Der Abstand des Punktes  $Q$  zur Ebene  $E$  entspricht der Länge der zur  $E$  senkrechten Strecke zwischen  $Q$  und dem Schnittpunkt  $F$  zwischen der Hilfsgeraden  $h$  und  $E$ .

Hilfsgerade  $h$ : Aufpunktvektor ist der Ortsvektor von  $Q$ , der Richtungsvektor ist der Normalenvektor von  $E$ .

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \mu \in \mathbb{R}.$$

Schneide  $h$  mit  $E$ :

$$h \cap E = F: \quad (2 + \mu) + (2 + \mu) + (4 + \mu) = 5$$

$$8 + 3\mu = 5$$

$$3\mu = -3$$

$$\mu = -1$$

Das heißt, dass der Abstand von  $Q$  zu  $E$  gleich der Länge des Richtungsvektors von  $h$  ist. Man muss von  $Q$  einmal den Richtungsvektor „nach unten“ wegen des negativen Vorzeichens gehen, um beim Punkt  $F$  in der Ebene  $E$  zu landen.

$$d(Q; E) = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3} \approx 1,73$$

Der Abstand von  $Q$  zu  $E$  beträgt  $\sqrt{3}$  Längeneinheiten.