Staatliche Berufsoberschule Nürnberg

Daniel Körner: koerner@bos-n.de

Webinar am 04. Juni 2020

Analytische Geometrie: Ebenen im $\mathbb{R}^3$

1. In einem Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ sind die drei Punkte $A(2|0|3), B(0|4|3), C(1|2|1)$, sowie die Ebenen $F_a: (a-1)x + y + (a-3)z = 8$ mit $a \in \mathbb{R}$ gegeben.

1.1 Stellen Sie die Gleichung der Ebene E, die durch die Punkte A, B und C festgelegt ist, sowohl in Parameterform als auch in Koordinatenform auf. [Mögliches Teilergebnis: $E: \; 2x + y = 4$]

1.2 Bestimmen Sie, soweit vorhanden, die Koordinaten der gemeinsamen Punkte der Ebene E mit den Koordinatenachsen und geben Sie die besondere Lage der Ebene E im Koordinatensystem an.

1.3 Untersuchen Sie die Ebenen F_a auf besondere Lagen zum Koordinatensystem in Abhängigkeit von a.

1.4 Untersuchen Sie rechnerisch die gegenseitige Lage der Ebene E zu den Ebenen F_a in Abhängigkeit von a.

1.5 Bestimmen Sie für $a = 1$ die Gleichung der Schnittgeraden s zwischen den Ebenen E und F_1.

1. In einem Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ sind die drei Punkte $A(2|0|3)$, $B(0|4|3)$, $C(1|2|1)$, sowie die Ebenen $F_a:\ (a-1)x+y+(a-3)z=8$ mit $a\in\mathbb{R}$ gegeben.

1.1 Stellen Sie die Gleichung der Ebene E, die durch die Punkte A, B und C festgelegt ist, sowohl in Parameterform als auch in Koordinatenform auf.
[Mögliches Teilergebnis: $E:\ 2x+y=4$]

Ebene E in Parameterform: $E:\ \vec{x}=\overrightarrow{OA}+\lambda\cdot\overrightarrow{AB}+\mu\cdot\overrightarrow{AC}$

$$E:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}0-2\\4-0\\3-3\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}1-2\\2-0\\1-3\end{pmatrix}$$

$$E:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}-2\\4\\0\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\-2\end{pmatrix}\ ;\lambda,\mu\in\mathbb{R}$$

Ebene in Normalenform (allgemein): $\vec{n}\circ(\vec{x}-\vec{a})=0$

Normalenvektor $\vec{n}$: $\vec{n}=\begin{pmatrix}-2\\4\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\2\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8\\-4\\0\end{pmatrix}$

Ebene E in vektorieller Normalenform:

$$\begin{pmatrix}-8\\-4\\0\end{pmatrix}\circ\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}\right)=0$$

$$\begin{pmatrix}-8\\-4\\0\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}x-2\\y\\z-3\end{pmatrix}=0$$

Ebene E in Koordinatenform:

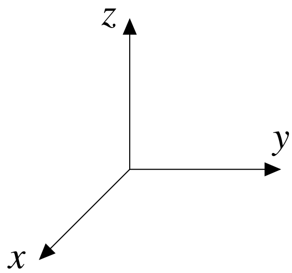
$$-8(x-2)-4y=0$$

$$-8x+16-4y=0$$

$$-8x-4y=-16$$

$$2x+y=4$$

1.2 Bestimmen Sie, soweit vorhanden, die Koordinaten der gemeinsamen Punkte der Ebene E mit den Koordinatenachsen und geben Sie die besondere Lage der Ebene $E: 2x+y=4$ im Koordinatensystem an.



Gemeinsamer Punkt mit der x-Achse: $y=0, z=0$ in $E: 2x+y=4$ einsetzen:

$2x=4 \quad \Leftrightarrow \quad x=2: \qquad S_x(2|0|0)$

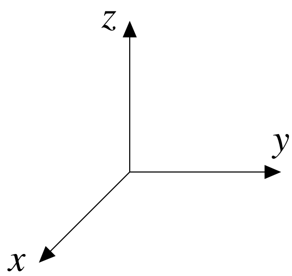
Gemeinsamer Punkt mit der y-Achse: $x=0, z=0$ in $E: 2x+y=4$ einsetzen:

$y=4: \qquad S_y(0|4|0)$

Gemeinsamer Punkt mit der z-Achse: $x=0, y=0$ in $E: 2x+y=4$ einsetzen:

$0=4$ Falsche Aussage, keine Lösung. Es gibt keinen gemeinsamen Punkt mit der z-Achse.

Die Ebene E verläuft parallel zur z-Achse.



1.3 Untersuchen Sie die Ebenen F_a auf besondere Lagen zum Koordinatensystem in Abhängigkeit von a.

Eine Ebene ist parallel zu einer Koordinatenachse, wenn der zugehörige Koeffizient 0 ist.

Ebenen $F_a: (a-1)x+y+(a-3)z=8$

Ebene ist parallel zur x-Achse, wenn $(a-1)=0$

Ebene ist nie parallel zur y-Achse, da der Koeffizient immer gleich 1 und damit ungleich 0 ist.

Ebene ist parallel zur z-Achse, wenn $(a-3)=0$

Für $a=1$ ist die Ebene $F_1: y-2z=8$ parallel zur x-Achse.

Für $a=3$ ist die Ebene $F_3: 2x+y=8$ parallel zur z-Achse.

1.4 Untersuchen Sie rechnerisch die gegenseitige Lage der Ebene E zu den Ebenen F_a in Abhängigkeit von a.

Zwei Ebenen können echt parallel zueinander sein oder identisch oder sich in einer gemeinsamen Geraden schneiden. In den ersten beiden Fällen sind die beiden Normalenvektoren Vielfache voneinander (linear abhängig).

Für welche Werte von a sind die Normalenvektoren der beiden Ebenen Vielfache voneinander?

Ansatz $(s \in \mathbb{R})$:

$$s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-1 \\ 1 \\ a-3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (I) \quad & 2s = a-1 \\ (II) \quad & s = 1 \\ (III) \quad & 0 = a-3 \end{aligned}$$

$s = 1$ (II) und $a = 3$ (III) in Gleichung (I):

$2 \cdot 1 = 3 - 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2 = 2$ Wahr!

Für $a = 3$ sind die beiden Normalenvektoren der Ebenen E und F_3 linear abhängig. Aus den Gleichungen erkennt man, dass die beiden Ebenen **nicht** identisch sind, also sind sie echt parallel zueinander:

$$E: \quad 2x + y = 4$$

$$F_3: \quad 2x + y = 8$$

Für alle anderen Werte von a, also $a \neq 3$, schneiden sich die beiden Ebenen in einer Geraden.

1.5 Bestimmen Sie für $a = 1$ die Gleichung der Schnittgeraden s zwischen den Ebenen E und F_1.

$E:\ 2x + y = 4 \qquad F_1:\ y - 2z = 8$

Aus E: $\quad x = 2 - \frac{1}{2}y$

Aus F_1: $\quad z = -4 + \frac{1}{2}y$

Wähle y beliebig als neuen Parameter $t \in \mathbb{R}$.

Also: $\quad x = 2 - \frac{1}{2}t \quad ; \quad y = t \quad ; \quad z = -4 + \frac{1}{2}t$

Der Ortsvektor $\vec{x}$ aller gemeinsamen Punkte der beiden Ebenen ergibt die Gleichung der Schnittgeraden s:

$$s: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - \frac{1}{2}t \\ t \\ -4 + \frac{1}{2}t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Veranschaulichung: