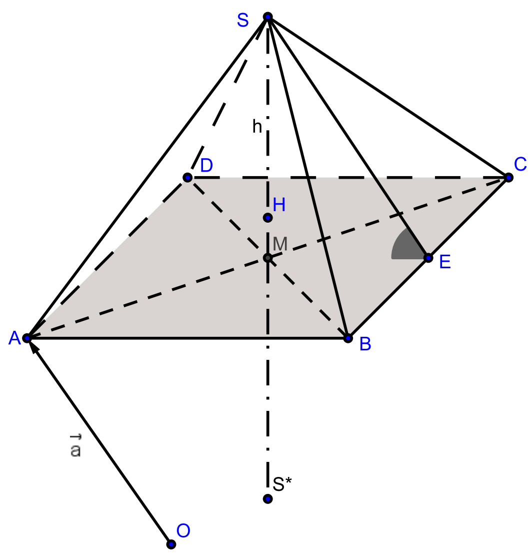
Mathematik

Lineare Algebra und Analytische Geometrie

12 Technik und 13 Nicht-Technik



Verfasser:

Daniel Körner*

Zum Buch: *Altrichter et al.*; Mathematik BOB Technik Band 1 und 2, Cornelsen, Berlin, 2017

(Staatliche Berufsoberschule Nürnberg)

V 5.0 September 2018

*koerner@bos-n.de

Inhaltsverzeichnis

1 Lösen von linearen Gleichungssystemen

Lineare Gleichungssysteme entstehen bei einer Vielzahl von Fragestellungen so auch in der Analytischen Geometrie beispielsweise bei der Schnittbildung dreier Ebenen. Wir befassen uns in diesem Abschnitt mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren zur Berechnung der Lösung eines linearen Gleichungssystems (LGS).
Ziel des Verfahrens ist es, das LGS durch Umformungen in eine Dreiecksform (auch Zeilenstufenform genannt) zu bringen, um daraus Aussagen über die Lösung des LGS treffen zu können.

(1)

I)	$3x$	$+y$	$-5z$	$=$	1	
II)	$-2x$	$-4y$	$+3z$	$=$	-1	$-2(\text{I}) - 3(\text{II})$
III)	$5x$	$+3y$	$-7z$	$=$	3	$5(\text{I}) - 3(\text{III})$
I)	$3x$	$+y$	$-5z$	$=$	1	
II)		$10y$	$+z$	$=$	1	
III)		$-4y$	$-4z$	$=$	-4	$-4(\text{II}) - 10(\text{III})$
I)	$3x$	$+y$	$-5z$	$=$	1	
II)		$10y$	$+z$	$=$	1	Zeilenstufenform
III)			$36z$	$=$	36	erreicht!
I)	$3x$	$+0$	-5	$=$	1	$\Rightarrow x = 2$
II)		$10y$	$+1$	$=$	1	$\Rightarrow y = 0$
III)			z	$=$	1	

Genau eine Lösung: $\underline{\underline{L = \{(2|0|1)\}}}$

(2)

I)	$2x$	$-3y$	$+z$	$=$	1	
II)	$-5x$	$+2y$	$-8z$	$=$	2	$-5(\text{I}) - 2(\text{II})$
III)	$-x$	$+3y$	$+z$	$=$	1	$-(\text{I}) - 2(\text{III})$
I)	$2x$	$-3y$	$+z$	$=$	1	
II)		$11y$	$+11z$	$=$	-9	
III)		$-3y$	$-3z$	$=$	-3	$-3(\text{II}) - 11(\text{III})$
I)	$2x$	$-3y$	$+z$	$=$	1	
II)		$11y$	$+11z$	$=$	-9	
III)			$0z$	$=$	60	

Keine Lösung: $\underline{\underline{L = \{\}}}$ (leere Menge), da in Zeile (III) eine falsche Aussage ($0z = 60$) steht!

(3)

I)	$5x$	$+y$	$+8z$	$=$	7	
II)	$4x$	$-3y$	$-5z$	$=$	17	$4(\text{I}) - 5(\text{II})$
III)	$-x$	$+2y$	$+5z$	$=$	-8	$-(\text{I}) - 5(\text{III})$
I)	$5x$	$+y$	$+8z$	$=$	7	
II)		$19y$	$+57z$	$=$	-57	
III)		$-11y$	$-33z$	$=$	33	$-11(\text{II}) - 19(\text{III})$
I)	$5x$	$+y$	$+8z$	$=$	7	$\Rightarrow x = 2 - z$
II)		$19y$	$+57z$	$=$	-57	$\Leftrightarrow y = -3z - 3$
III)			$0z$	$=$	0	z ist beliebig!

Da z beliebig ist, benennen wir z um in z.B. t. Damit ist $y = -3t - 3$ und $x = 2 - t$.

Unendlich viele Lösungen: $\underline{\underline{L = \{(2 - t| - 3t - 3|t)\big| t \in \mathbb{R}\}}}$

Jede Gleichung in obigen Gleichungssystemen kann als Koordinatenform einer Ebene im Raum aufgefasst werden. Je nach Lage der drei Ebenen zueinander erhält man entweder genau eine Lösung, keine Lösung oder unendlich viele Lösungen. Vgl. Kap. 5.3.3, S. 28.

→ Buch S. 171 – 175 Aufg. S. 175 – 176

Nicht im Lehrplan enthalten, aber eine sinnvolle Ergänzung:

Eine schnelle Aussage, ob ein LGS eindeutig lösbar ist, erhält man über den Wert der Determinante $\det(M)$ der Koeffizientenmatrix M:

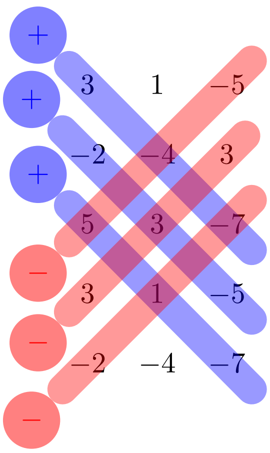
Lösbarkeit über Determinante

$$\det(M) \neq 0: \quad \text{LGS ist eindeutig lösbar}$$

$$\det(M) = 0: \quad \text{LGS hat keine oder unendlich viele Lösungen}$$

$$\det(\mathrm{M}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{33}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{11} + a_{33}a_{12}a_{31})$$

Praktische Berechnung der Determinante am Beispiel (1):



$\det(M) = 3\cdot(-4)\cdot(-7) + (-2)\cdot 3\cdot(-5) + 5\cdot 1\cdot(-7) - 5\cdot(-4)\cdot(-5) - 3\cdot 3\cdot 3 - (-2)\cdot 1\cdot(-7) = -62$

$\det(M) \neq 0$, also hat das LGS genau eine Lösung!

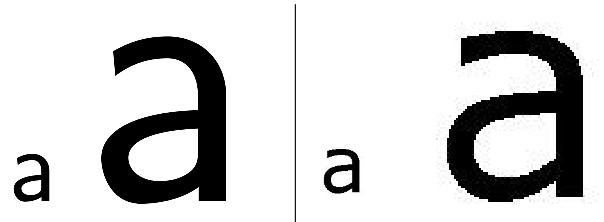
→ Buch S. 177 – 178 Aufg. S. 180

Lineare Gleichungssyteme mit Parameter: → Buch S. 181 Aufg. S. 182

Übungen zum Kapitel: Aufg. S. 183 – 184

2 Vektoren und einfache Vektoroperationen

Vektoren kommen nicht nur in der Mathematik, sondern z. B. auch in der Physik vor. Andere Anwendungen von Vektoren finden sich bei den Vektorgrafiken (z. B. svg-Dateiformat, Schriften). Der Vorteil gegenüber den Pixelgrafiken ist die beliebige Skalierbarkeit von Vektorgrafiken ohne Qualitätsverlust.



Schrift als Vektorgrafik | Schrift als Pixelgrafik

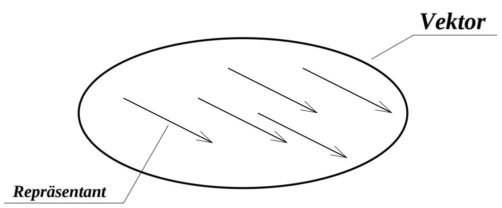
Beispiele für *Vektoren* in der Physik: Kraft $\vec{F}$, Geschwindigkeit $\vec{v}$ ...

Im Gegensatz dazu bezeichnet man ungerichtete Größen als *Skalare*.
Z. B. Masse m, Temperatur T.

Vektor

Ein *Vektor* wird durch seine *Länge* und seine *Richtung* festgelegt.
Alle Pfeile, die die gleiche Länge und die gleiche Richtung haben, gehören zu einem Vektor.
Ein einzelner Pfeil eines Vektors heißt *Repräsentant* des Vektors.

Veranschaulichung:

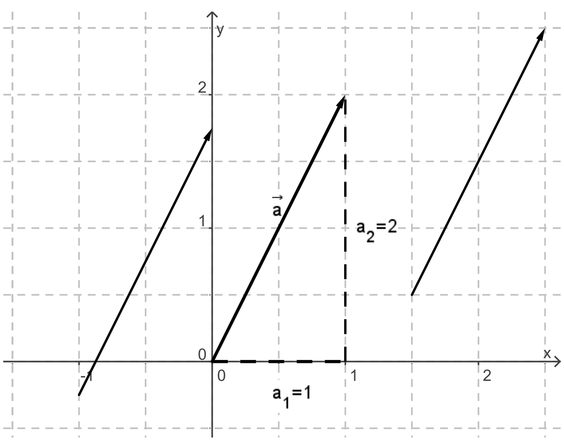


Jeder Vektor enthält eine unendliche Anzahl von Repräsentanten, dargestellt durch parallele, gleich orientierte und gleich lange Pfeile.

2.1 Punkte und Vektoren

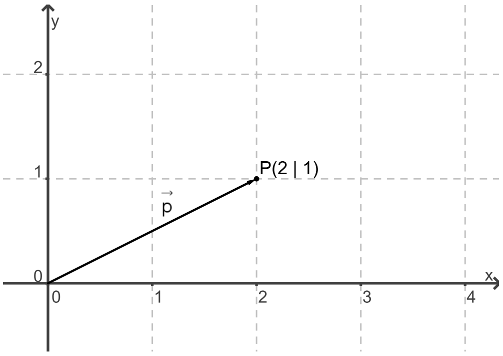
Algebraische Darstellung eines Vektors als n-Tupel: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 2-Tupel im $\mathbb{R}^2$ (Ebene).

Veranschaulichung im kartesischen Koordinatensystem:



Bitte beachten Sie: Die Wahl des Ursprungs als Anfangspunkt eines Repräsentanten des Vektors ist die natürlichste, jedoch nicht die einzig mögliche!

Alle drei gezeichneten Pfeile repräsentieren den gleichen Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.



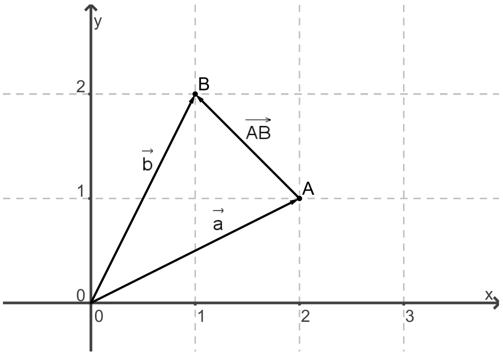
Der Punkt P hat die *Punktkoordinaten* $(2|1)$.

Der Punkt P ist als Endpunkt des Vektors $\vec{p}$, der im Ursprung beginnt, festgelegt.

Der Vektor $\vec{p}$ ist die Verbindung zwischen dem Ursprung $O(0|0)$ und dem Punkt P.

Man schreibt auch $\overrightarrow{OP}$ statt $\vec{p}$: *Ortsvektor* des Punktes P.

Verbindungsvektor:



Ortsvektoren:

$$\overrightarrow{OA} = \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OB} = \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Verbindungsvektor:

$$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Beachten Sie: Der *Ortsvektor* $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ beginnt im Ursprung und endet im Punkt $(-1|1)$!

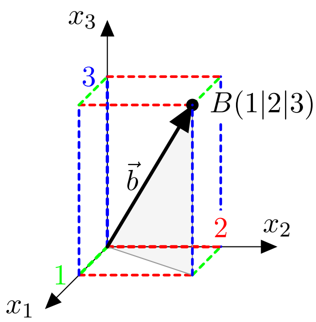
Orts- und Verbindungsvektor

Den speziellen Verbindungsvektor zwischen dem Ursprung O und einem Punkt A nennt man Ortsvektor $\overrightarrow{OA}$.

Vektoren *im Raum* $\mathbb{R}^3$ haben drei Koordinaten:

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{3-Tupel.}$$

Bezogen auf den Ursprung des Koordinatensystems sind diese Koordinaten auch die Koordinaten des zugehörigen Punktes B im Raum. https://www.geogebra.org/m/GA5NvE6E



▶ http://youtu.be/YohlXq7paus

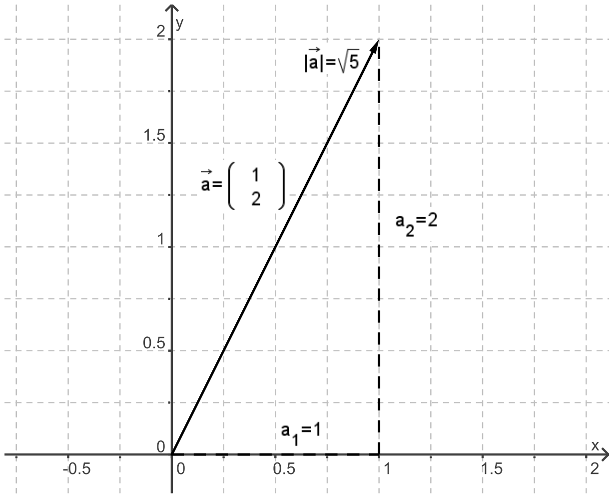
Länge Vektor

Die Länge eines Vektors $\vec{a}$ ist definiert als die reelle Zahl

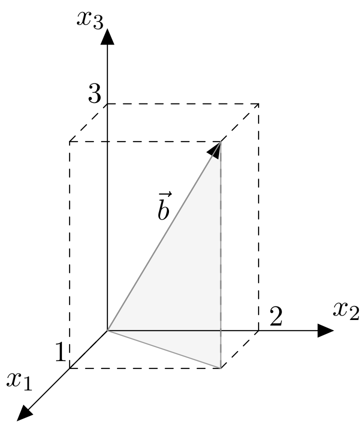
$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}\ .$$

$$\text{Im } \mathbb{R}^2: \quad |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \quad ; \quad \text{Im } \mathbb{R}^3: \quad |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

1. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad |\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} \approx 2{,}24$



2. $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad |\vec{b}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14} \approx 3{,}744$



▶ http://youtu.be/Z0tpWlBt698

Abstand zwischen zwei Punkten

Zwei Punkte $A(a_1|a_2|a_3)$ und $B(b_1|b_2|b_3)$ haben im Raum den gegenseitigen Abstand

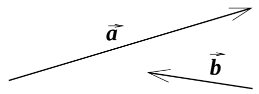
$$d(A;B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

Bsp. Geg.: $A(3|-1|2),\ B(4|2|3),\ C(-3|-2|5)$
Geben Sie alle Orts- und Verbindungsvektoren an und berechnen Sie die zugehörigen Längen!

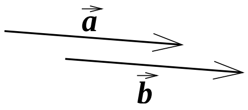
→ Buch S. 188 – 192 Aufg. S. 189 u. S. 192

2.2 Einfache Vektoroperationen

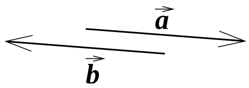
Mögliche Lagen von zwei Vektoren

1. 

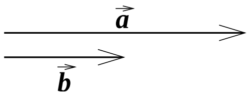
Vektor $\vec{a} \neq \vec{b}$ $\vec{a}$ ist ungleich Vektor $\vec{b}$

2. 

$\vec{a} = \vec{b}$ Gleichsinnig parallel, gleiche Länge. Parallelgleich.

3. 

$\vec{a} = -\vec{b}$ Gegensinnig parallel (antiparallel), gleiche Länge.

4. 

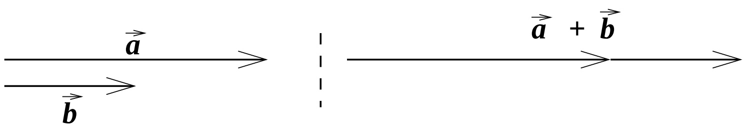
$\vec{a} = 2 \cdot \vec{b}$ Gleichsinnig parallel, unterschiedliche Länge.

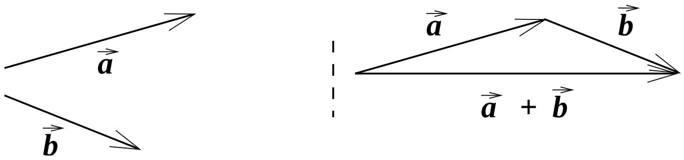
Gleiche Vektoren

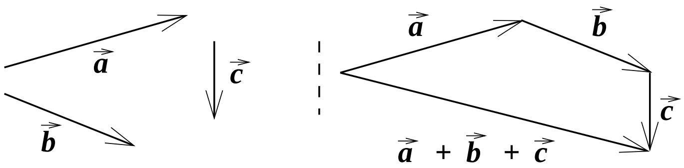
Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind genau dann gleich, wenn zwei beliebige Repräsentanten von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ parallelgleich sind.

Vektoraddition (zeichnerisch) Die zeichnerische Addition von Vektoren erfolgt, indem man den Fußpunkt (Anfang) des einen Vektorpfeils an die Spitze (Ende) des anderen Vektorpfeils anhängt. Dies ist möglich, da alle Vektoren durch unendlich viele parallelgleiche Pfeile darstellbar sind.

Beispiele:

1. 

2. 

3. 

Addition von Vektoren

Die Länge der Summe von Vektoren ist im Allgemeinen nicht gleich der Summe der einzelnen Längen der Vektoren.
Ausnahme: alle Vektoren sind parallel.

Beispiele für die Addition von Vektoren:

1. $\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$

2. $\vec{c}+\vec{d}=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$

3. $\vec{e}+\vec{f}-\vec{g}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$

- Kommutativgesetz: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$
- Assoziativgesetz: $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$
- Nullvektor: $\vec{a}-\vec{a}=\vec{0}$

Gegenvektor

$-\vec{a}$ nennt man den *Gegenvektor* zu $\vec{a}$.
Vektorpfeil und Gegenvektorpfeil sind antiparallel zueinander.

Die S-Multiplikation

S-Multiplikation

Die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar nennt man S-Multiplikation

Beispiele:

- $2\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-4\\0\end{pmatrix}$ Verdoppelung der Länge. Richtung bleibt gleich.
- $\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-1\\0\end{pmatrix}$ Halbierung der Länge. Richtung bleibt gleich.
- $-1\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$ Länge bleibt gleich. Umkehr der Orientierung.
- $0\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=\vec{0}$ Nullvektor.

▶ http://youtu.be/YNjWRLMaE3U

→ Buch S. 193 – 197

Aufg. S. 197 – 200

3 Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit von Vektoren

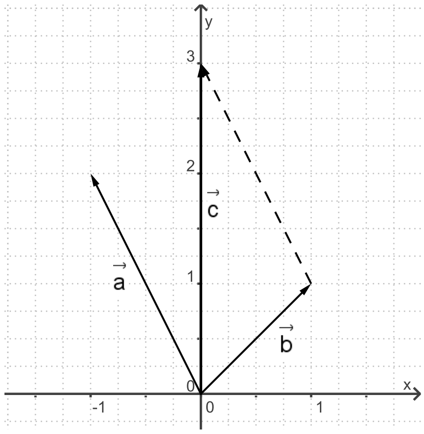
3.1 Linearkombination von Vektoren

Aus zwei Vektoren kann man auf verschiedene Arten einen dritten Vektor erzeugen.

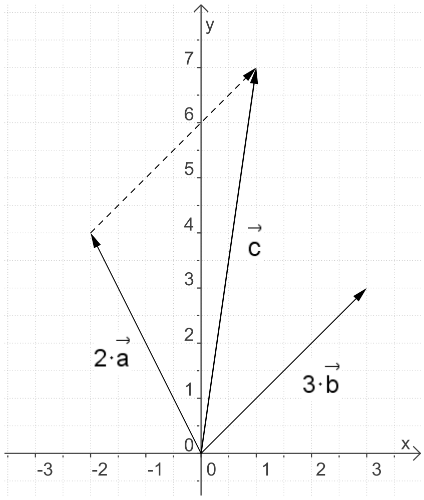
Zum Bsp. ($\mathbb{R}^2$): Gegeben $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Zwei Möglichkeiten der Kombination von unendlich vielen:

1. $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$



2. $\vec{c} = 2 \cdot \vec{a} + 3 \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$



Allgemein: $\vec{c} = \lambda_1 \cdot \vec{a} + \lambda_2 \cdot \vec{b} \quad ; \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

Somit kann im Vektorraum $\mathbb{R}^2$ jeder beliebige Vektor $\vec{c}$ aus den beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear kombiniert (dargestellt) werden.

Linearkombination

Der Vektor $\vec{v}$ heißt *Linearkombination* der Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$, wenn gilt:

$$\vec{v} = \lambda_1 \cdot \vec{a_1} + \lambda_2 \cdot \vec{a_2} + \ldots + \lambda_n \cdot \vec{a_n} \qquad ,$$

wobei $n \in \mathbb{N}$ und $\lambda_i \in \mathbb{R}$

Besondere Punkte:

Bsp. (1) Mittelpunkt M einer Strecke $\overline{AB}$

Mittelpunkt

Ortsvektor des *Mittelpunkts* M einer Strecke $\overline{AB}$:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$$

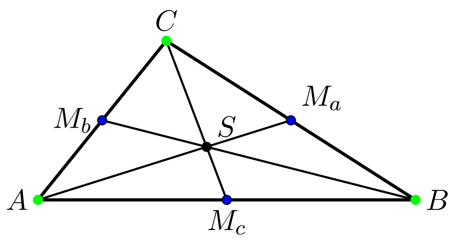
Bsp. (2) Schwerpunkt S eines Dreiecks ΔABC

Schwerpunkt

Der *Schwerpunkt* S eines Dreiecks ist der Schnittpunkt der drei Seitenhalbierenden.

Ortsvektor $\overrightarrow{OS}$ des Schwerpunkts S:

$$\overrightarrow{OS} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$



▶ https://www.youtube.com/watch?v=vrU2Q8Kma-I

→ Buch S. 204 – 207

Aufg. S. 208 – 209

3.2 Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit

Linear unabhängig

Die Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ sind genau dann *linear unabhängig*, wenn der Ansatz

$$k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2 + \ldots + k_n\vec{v}_n = \vec{0}$$

nur die Lösung $k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 0$ hat.

Ist mindestens einer der Koeffizienten $k_i \neq 0$, so nennt man die Vektoren *linear abhängig*.

Zwei Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ sind **linear abhängig**, wenn eine der folgenden Eigenschaften erfüllt ist:

- $\vec{v}_1 = \lambda \cdot \vec{v}_2 \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}$
- $\vec{v}_1$ ist parallel zu $\vec{v}_2$
- $k_1 \cdot \vec{v}_1 + k_2 \cdot \vec{v}_2 = \vec{0}$ für $k_1 \neq 0, k_2 \neq 0$

Bsp.: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Es gilt:

- $\vec{v}_1 = 2\vec{v}_2$
- Die Vektorpfeile sind parallel zueinander.
- $1 \cdot \vec{v}_1 - 2 \cdot \vec{v}_2 = \vec{0}$

Zwei Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ sind **linear unabhängig**, wenn eine der Eigenschaften erfüllt ist:

- $\vec{v}_1 \neq \lambda\vec{v}_2 \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}$
- $\vec{v}_1$ ist nicht parallel zu $\vec{v}_2$
- $k_1 \cdot \vec{v}_1 + k_2 \cdot \vec{v}_2 = \vec{0}$ für $k_1 = k_2 = 0$

Bsp.: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

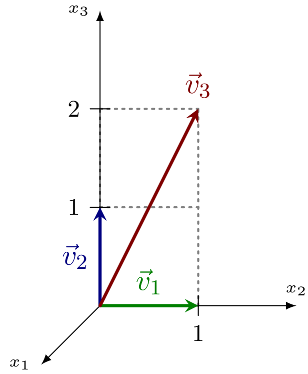
Es gilt:

- $\vec{v}_1 \neq 2 \cdot \vec{v}_2$
- Die Vektorpfeile sind nicht parallel zueinander.
- $k_1 \cdot \vec{v}_1 + k_2 \cdot \vec{v}_2 = \vec{0}$ nur für $k_1 = k_2 = 0$ möglich.

Drei Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ sind **linear abhängig**, wenn eine der Eigenschaften erfüllt ist:

- $\vec{v}_1 = \lambda_1 \cdot \vec{v}_2 + \lambda_2 \cdot \vec{v}_3 \quad , \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$
- Jeder der drei Vektoren lässt sich als Linearkombination der anderen beiden Vektoren darstellen.
- $k_1 \cdot \vec{v}_1 + k_2 \cdot \vec{v}_2 + k_3 \cdot \vec{v}_3 = \vec{0}$, wobei mind. zwei Koeffizienten ungleich 0.
- Die drei Vektoren liegen in einer Ebene. Sie sind *komplanar*.

Bsp.: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$



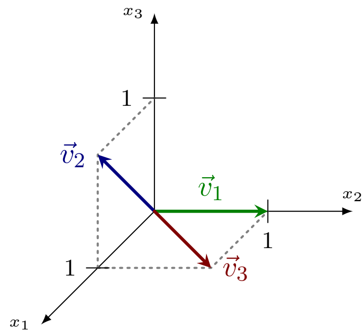
- $\vec{v}_1 = -2 \cdot \vec{v}_2 + \vec{v}_3$
- $\vec{v}_1 + 2 \cdot \vec{v}_2 - \vec{v}_3 = \vec{0} \qquad (k_1 = 1, k_2 = 2, k_3 = -1)$
- Die Vektoren liegen in einer Ebene ($x_2 - x_3$–Ebene).

Drei Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ aus $\mathbb{R}^3$ sind **linear unabhängig**, wenn eine der Eigenschaften erfüllt ist:

- Jeder beliebige Vektor $\vec{x}$ lässt sich als Linearkombination der drei Vektoren darstellen: $\vec{x} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \lambda_3 \vec{v}_3$
- Aus $k_1 \vec{v}_1 + k_2 \vec{v}_2 + k_3 \vec{v}_3 = \vec{0}$ folgt $k_1 = k_2 = k_3 = 0$
- Die drei Vektoren liegen **nicht** in einer Ebene.

Bsp.: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

- $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 - \vec{v}_3$ etc.
- $k_1 \vec{v}_1 + k_2 \vec{v}_2 + k_3 \vec{v}_3 = \vec{0} \qquad$ nur für $k_1 = k_2 = k_3 = 0$
- Die Vektoren liegen nicht in einer Ebene. Sie spannen einen Raum auf.



→ Buch S. 210 – 211 Aufg. S. 212

3.3 Basis und Dimension eines Vektorraums

Basis

Jeder Vektor des $\mathbb{R}^3$ lässt sich als Linearkombination von drei linear unabhängigen Vektoren darstellen.
Diese drei Vektoren nennt man eine *Basis des Vektorraums* $\mathbb{R}^3$.

Beispiele für Basis des $\mathbb{R}^3$:

1. Kanonische Basis: $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \quad , \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \quad , \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

   $$\vec{a} = \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = 2 \cdot \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 3 \cdot \vec{e}_3$$

2. Beliebige Basis B: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \quad , \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \quad , \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$

   Darstellung von $\vec{a} = \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$ bezüglich der Basisvektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$:

   Ansatz: $k_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + k_2 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + k_3 \cdot \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$

   Lösung: $k_1 = \frac{1}{3} \quad , \quad k_2 = \frac{7}{3} \quad , \quad k_3 = \frac{2}{3}$

   Die Koordinaten von $\vec{a}$ bezüglich der *kanonischen Basis* sind: $\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$.

   Die Koordinaten von $\vec{a}$ bezüglich der Basis B sind: $\vec{a}_B = \begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{7}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$

Basis

Eine endliche Menge B von linear unabhängigen Vektoren eines Vektorraums V heißt *Basis B des Vektorraums*, wenn sich jeder Vektor aus V als Linearkombination der Basisvektoren darstellen lässt.
Die Anzahl der Basisvektoren eines Vektorraums V heißt die *Dimension von V*.

Z.B.: $\dim \mathbb{R}^2 = 2 \quad , \quad \dim \mathbb{R}^3 = 3$

→ Buch S. 213 – 214 Aufg. S. 215 – 216 ▶ http://youtu.be/UfJgVyOWOQU

4 Produkte von Vektoren

4.1 Skalarprodukt und Orthogonalität

4.1.1 Definition und Rechenregeln

Das Skalarprodukt findet z. B. Anwendung in der Physik bei der Berechnung der verrichteten Arbeit W eines Körpers, der mit der Kraft $\vec{F}$ entlang eines Weges $\vec{s}$ mit konstanter Geschwindigkeit bewegt wird.
Der bekannte nicht-vektorielle Zusammenhang „Arbeit = Kraft mal Weg“ , also $W = F \cdot s$, gilt jedoch nur für den speziellen Fall, dass die beiden Größen Kraft und Weg *gleichgerichtet* sind. Was aber, wenn die beiden Vektoren $\vec{F}$ und $\vec{s}$ nicht gleichgerichtet sind?

Skalarprodukt

Das Skalarprodukt $\vec{a} \circ \vec{b}$ zweier Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ ist zum einen das Produkt ihrer Längen und dem Kosinus des Zwischenwinkels φ.

$$\boxed{\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi} \quad ,$$

wobei $0° \leq \varphi \leq 180°$.

Zum anderen kann es aus den Komponenten der Vektoren direkt berechnet werden:

$$(\mathbb{R}^3)\colon\ \vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

Beachten Sie: Das Ergebnis der Berechnung des Skalarproduktes zweier Vektoren ist ein *Skalar*, also eine Zahl!

Beispiele:

1. Direkte Berechnung des Skalarprodukts aus den Komponenten zweier Vektoren im $\mathbb{R}^3$:
$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) - 3 \cdot 3 = \mathbf{-6} \text{ (einerseits)}$$
Andererseits ist das Skalarprodukt das Produkt der beiden Längen der Vektoren und dem Kosinus des Zwischenwinkels φ der beiden Vektoren. Den Winkel φ kennen wir nicht. Wir können ihn aber ausrechnen, denn wir kennen das Ergebnis des Skalarprodukts: $\mathbf{-6}$!
Also gilt: $\quad \mathbf{-6} = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}\right| \cdot \cos\varphi \quad$ [Siehe obiger Kasten]
Stellt man die Gleichung nach $\cos\varphi$ um und berechnet die Längen, so erhält man:
$$\cos\varphi = \frac{-6}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-3)^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2}} = \frac{-6}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{14}} = \frac{-6}{14} = \frac{-3}{7} \quad ; \quad \underline{\varphi = 115{,}38°}$$

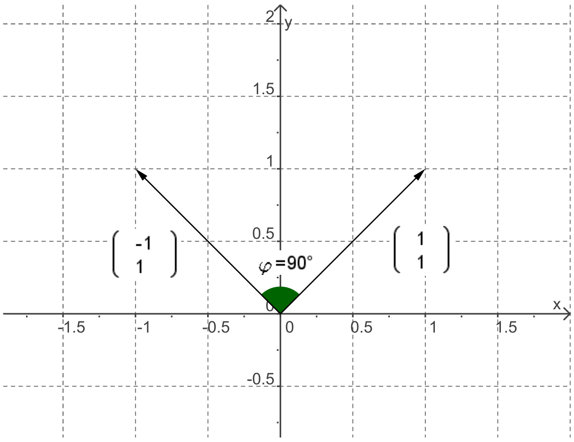
https://www.geogebra.org/m/XCF259uh ▶ http://youtu.be/uco9EGhaOQs ▶ http://youtu.be/PEPjcTA0BG8

2. Das Skalarprodukt kann man auch im $\mathbb{R}^2$ berechnen:

$$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 = 0$$

Also ist $\cos\varphi = 0$ wegen $\cos\varphi = \dfrac{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right|} = \dfrac{1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1}{\sqrt{1^2+1^2} \cdot \sqrt{(-1)^2+1^2}} = \dfrac{0}{2}$

$\cos\varphi = 0$, wenn $\varphi = 90°$. Die beiden Vektoren stehen also senkrecht (orthogonal) zueinander:



→ Buch S. 220 – 221 Aufg. S. 223/1,2,6,7,8

Rechenregeln

- Kommutativgesetz: $\vec{a} \circ \vec{b} = \vec{b} \circ \vec{a}$
- Distributivgesetz: $\vec{a} \circ (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \circ \vec{b} + \vec{a} \circ \vec{c}$
- Gemischtes Assoziativgesetz: $k \cdot (\vec{a} \circ \vec{b}) = (k \cdot \vec{a}) \circ \vec{b}\ ;\ k \in \mathbb{R}$
- Positivität: Für jeden Vektor $\vec{a} \neq \vec{0}$ gilt: $\vec{a} \circ \vec{a} = a \cdot a \cdot \underbrace{\cos(0°)}_{1} = a^2 > 0$

Beispiele:

1. $\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix} = 3 - 1 + 2 = 4 \quad ; \quad \begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = 3 - 1 + 2 = 4$

2. $\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} \circ \left(\begin{pmatrix}2\\-3\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}0\\-2\\3\end{pmatrix} = -4 + 3 = -1$

   $\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2\\-3\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix} = 6 - 6\ +\ (-6) + 2 + 3 = -1\ \checkmark$

→ Buch S. 222 Aufg. S. 223/3,4

4.1.2 Winkel zwischen zwei Vektoren

Mit dem Skalarprodukt lässt sich also der Zwischenwinkel zweier Vektoren bestimmen und daraus folgend sehr schnell berechnen, ob zwei Vektoren senkrecht zueinander stehen. Dann ist das Ergebnis des Skalarprodukts gleich 0.
Es gelten folgende wichtige Zusammenhänge:

Zwischenwinkel/Orthogonalität

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}} \quad \text{und} \quad \boxed{\vec{a} \circ \vec{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \perp \vec{b}}$$

→ Buch S. 224 – 226 Aufg. S. 227/1,2,3,4,8 ▶ http://youtu.be/DYZSBKnd-kI

4.2 Das Vektorprodukt zweier Vektoren

Neben dem Skalarprodukt gibt es eine zweite Art, zwei Vektoren miteinander zu multiplizieren: Das Vektorprodukt.

4.2.1 Definition und Rechenregeln

Vektorprodukt

Das vektorielle Produkt zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist im $\mathbb{R}^3$ definiert als:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} = \vec{c}$$

Es gilt: $\vec{c} \perp \vec{a}$ und $\vec{c} \perp \vec{b}$

Das Vektorprodukt wird wegen des verwendeten Zeichens $\times$ auch als *Kreuzprodukt* bezeichnet.

Beispiele:

1. $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\cdot 0 - 0\cdot 1\\ 0\cdot(-1) - 1\cdot 0\\ 1\cdot 1 - 1\cdot(-1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$

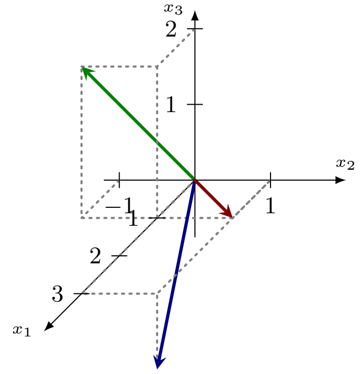
2. $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ (Siehe kanonische Basis S.14)

3. $\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ (Siehe Zeichnung rechts)

4. $\begin{pmatrix}-2\\3\\-1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}4\\-6\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ Warum?

Nebenrechnung:

$$\begin{array}{cc} \cancel{1} & \cancel{-1} \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{array}$$



→ Buch S. 232 – 233 Aufg. S. 234/1,2 ▶ http://youtu.be/A7E0JApgTQ8

Vektorprodukt

Weiter gilt folgender Zusammenhang:

$$\boxed{|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi}$$

bzw.

$$\boxed{\sin\varphi = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}}$$

wobei φ der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist.

Hieraus folgt sofort:
Sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear abhängig, also parallel zueinander, also kollinear, so ist das Ergebnis des Vektorprodukts der Nullvektor $\vec{0}$, da der Zwischenwinkel $\varphi = 0°$ ist.

Parallele Vektoren

Kriterium für lineare Abhängigkeit zweier Vektoren aus dem $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \parallel \vec{b}$$

Rechenregeln

- $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$
- $(r \cdot \vec{a}) \times (s \cdot \vec{b}) = r \cdot s \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$
- $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$ (nicht kommutativ)
- $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$

→ Buch S. 234 Aufg. S. 234/3

4.2.2 Flächen- und Volumenberechnungen

Flächenberechnung

Flächeninhalt

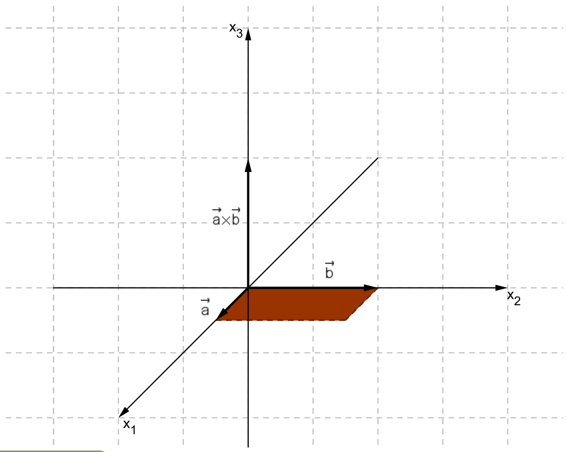
Der Betrag, also die Länge, von $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ ist die Maßzahl des Flächeninhalts des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten *Parallelogramms*.

Die Hälfte der Länge von $\vec{c}$ ist somit ein Maß für den Flächeninhalt des *Dreiecks*, das von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gebildet wird.

Z.B.: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Die Vektoren bilden ein spezielles Parallelogramm: ein Rechteck. Der Flächeninhalt müsste also $2 \cdot 1 = 2$ sein.

$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad , \quad |\vec{c}| = \sqrt{4} = \mathbf{2}$ (FE) ✓



→ Buch S. 235–236 Aufg. S. 239/1 ▶ http://youtu.be/a06e1-ceMy8

Volumenberechnung

Spatprodukt

Das Ergebnis des *Spatproduktes* $\qquad V = \left| \vec{a} \circ (\vec{b} \times \vec{c}) \right|$

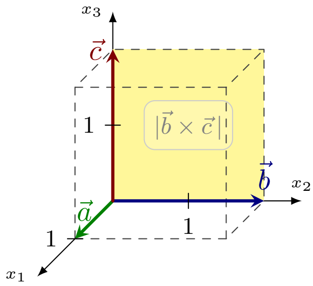
ist die Maßzahl für das Volumen des von den Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Spats, auch Parallelflach oder Parallelepiped genannt.

Alternativ kann man das Spat-Volumen auch über die *Determinante* der aus den drei Vektoren gebildeten Matrix berechnen.

$V = \left| \det(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}) \right|$

Beispiel: Quader als Spezialfall eines Spats, nicht zu verwechseln mit 

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$



$$V = |\vec{a} \circ (\vec{b} \times \vec{c})| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right] \right| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \mathbf{4}$$

→ Buch S. 237 Aufg. S. 239/2,3 ▶ http://youtu.be/kKt4scQiJc4

Volumen Tetraeder

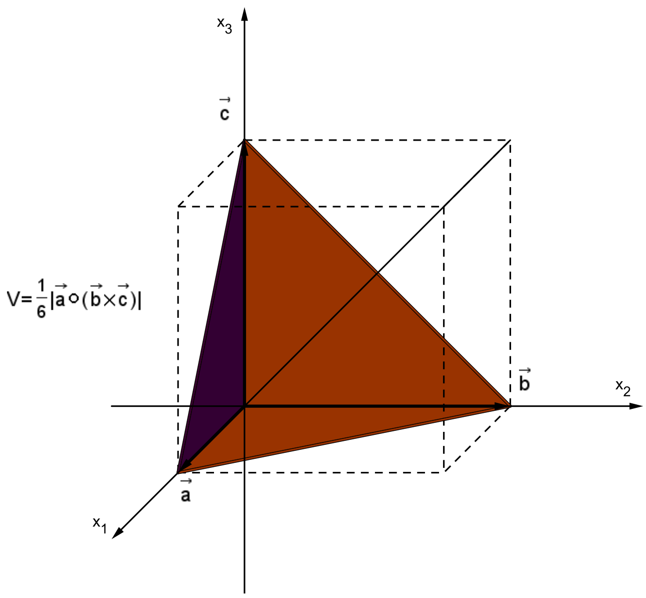
Das Volumen eines von den Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ gebildeten Tetraeders, das ist eine Pyramide mit dreieckiger Grundfläche, berechnet sich folgendermaßen:

$$V_{\text{Tetra}} = \frac{1}{6} \cdot |\vec{a} \circ (\vec{b} \times \vec{c})|$$

Z.B.: $\quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$V_{\text{Tetra}} = \frac{1}{6} \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \right| =$$

$$= \frac{1}{6} \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \underline{\underline{\frac{2}{3}}} \text{ Volumeneinheiten (VE)}$$



→ Buch S. 238 Aufg. S. 239/3,4,7,8

Kriterium für lineare Abhängigkeit

Drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ aus dem $\mathbb{R}^3$ sind genau dann linear abhängig (also komplanar oder sogar kollinear), wenn das Ergebnis des Spatproduktes gleich null ist.
Ansonsten sind sie linear unabhängig.

Aufg. S. 240/1,2,4,5,7,9,11

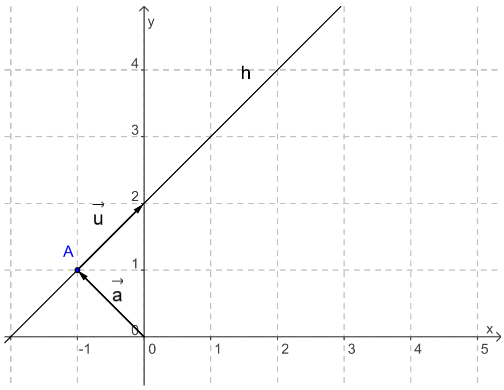
Ende Band 1

5 Geraden, Ebenen

5.1 Geradengleichung

Punkt-Richtungs-Gleichung

1. Beliebige Gerade ($\mathbb{R}^2$)



Der Aufpunktvektor $\vec{a}$ ist der Ortsvektor eines Punktes der Geraden h. Der Richtungsvektor $\vec{u}$ zeigt bei beliebiger Länge in Richtung der Geraden.

Bildet man die Summe aus dem Aufpunktvektor $\vec{a}$ und einem beliebigen Vielfachen des Richtungsvektors $\vec{u}$, so erhält man alle Punkte der Geraden h.

$h\colon\ \vec{x} = \vec{a} + k \cdot \vec{u} \quad , \quad k \in \mathbb{R}\ .$

Hier: $h\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad k \in \mathbb{R}\ .$

Schreibt man die beiden Koordinaten x und y des Ortsvektors $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ der Geraden h als zwei Gleichungen, so erhält man eine parametrisierte Darstellung: $x = -1+k$ und $y = 1+k$

Stellt man die erste Gleichung nach k um ($k = x+1$) und ersetzt k in der zweiten Gleichung, so erhält man: $\underline{y = x + 2}$.
Dies ist die parameterfreie Darstellung der Geraden h, wie aus der Analysis bekannt.

2. Ein Beispiel aus dem $\mathbb{R}^3$: $A(1|1|1)$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

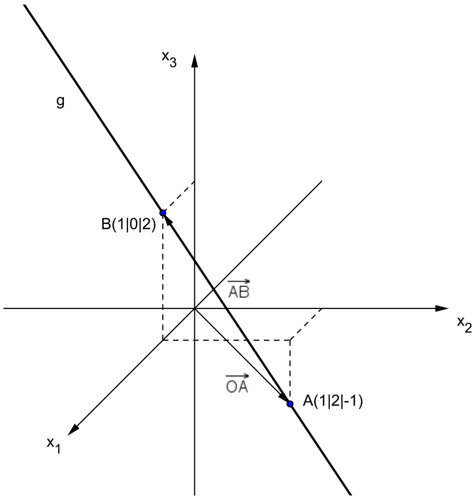
   Geradengleichung: $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad , \quad k \in \mathbb{R}\ .$

   Liegen folgende Punkte auf der Geraden g: $B(3|-3|7)$, $C(0|3|4)$?

Zwei-Punkte-Gleichung

Wir stellen die Gleichung einer Gerade durch zwei Punkte in vektorieller Form auf.

Beispiel: $A(1|2|-1)\,,\ B(1|0|2)$



Als Aufpunktvektor verwendet man den Ortsvektor $\overrightarrow{OA}$. Der Richtungsvektor der Geraden ist der Verbindungsvektor $\overrightarrow{AB}$. Damit lautet die Gleichung der Geraden g wie folgt:

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}\ ,\ \lambda \in \mathbb{R}$$

Allgemein gilt:

Geradengleichung

Sind die zwei Punkte A und B gegeben, so lautet die Gleichung der Geraden durch die beiden Punkte:

$$g:\ \vec{x} = \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right)\ ,\ \lambda \in \mathbb{R}$$

→ Buch S. 164 –167 (Band 2)

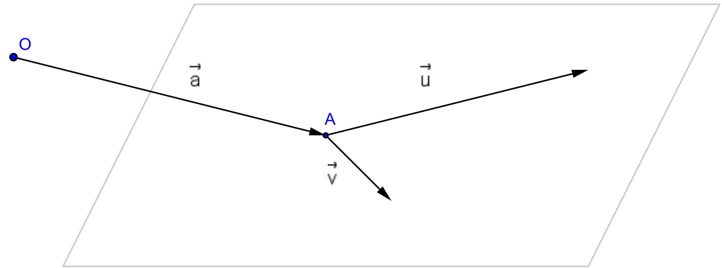
Aufg. S. 168/1,3,4,8

▶ http://youtu.be/Pa_qbvqWDbA

5.2 Ebenengleichung

5.2.1 Parameterform

Punkt-Richtungs-Gleichung



Ebene in Parameterform

Ebene in Parameterschreibweise

Für jeden Punkt X der Ebene E gilt: $E: \vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \quad , \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

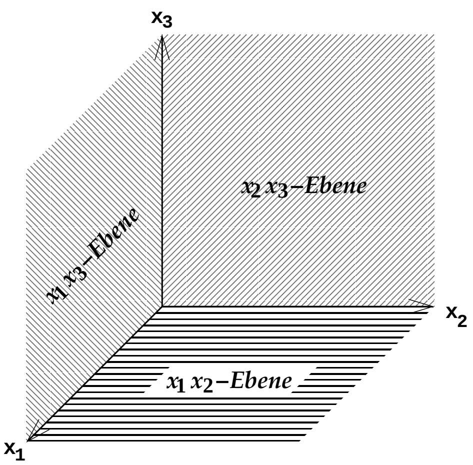
Bsp.: $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

Liegen die Punkte $B(7|6|3)$ und $C(-8|6|4)$ in der Ebene E?

Ansatz für B: $\begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$; LGS hat keine Lösung. Daraus folgt $B \notin E$.

Analog für C: $\lambda = 2\,,\ \mu = 2. \quad C \in E$

<u>Koordinatenebenen</u>:



x_1x_2-Ebene: $(x_3 = 0)$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

x_1x_3-Ebene: $(x_2 = 0)$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

x_2x_3-Ebene: $(x_1 = 0)$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Drei-Punkte-Gleichung

Gesucht ist die Gleichung einer Ebene in Parameterform durch drei Punkte.

Bsp.: $A(0|5|0)$, $B(9|0|0)$, $C(0|0|6)$

Die beiden Verbindungsvektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ sind die Richtungsvektoren, die *in* der Ebene liegen. Als Aufpunktvektor empfiehlt sich der Ortsvektor des Punktes A.

Ebene durch drei Punkte

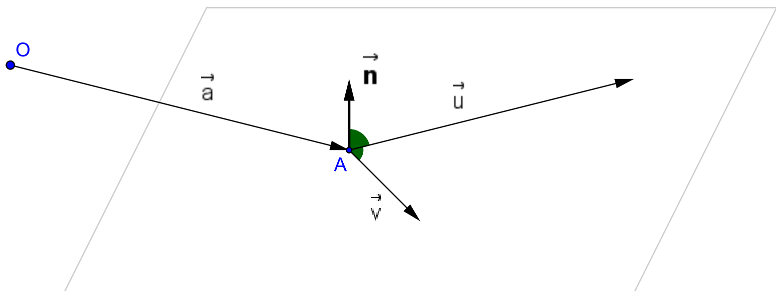
$$\text{Ebene } E(A,B,C): \quad \vec{x} = \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \overrightarrow{AB} + \mu \cdot \overrightarrow{AC} \quad ; \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$E: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} \quad ; \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

→ Buch S. 169 – 172 (Band 2) Aufg. S. 172/1,2,3,5 ▶ http://youtu.be/_qaX4Iq05iE

5.2.2 Koordinatenform einer Ebene

Eine Ebene lässt sich neben der Parameterform auch in Normalenform, d. h. durch den auf der Ebene senkrecht stehenden Vektor $\vec{n}$ (Normalenvektor) darstellen.



Ebene in Normalenform

Die (vektorielle) **Normalenform einer Ebene** E im $\mathbb{R}^3$ lautet:

$$\boxed{\vec{n} \circ (\vec{x} - \vec{a}) = 0} \qquad \text{wobei } \vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$$

<u>Beispiel</u>: Umwandlung Parameterform in Normalenform und weiter in Koordinatenform

Gegeben: $E: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} \quad ; \quad s, t \in \mathbb{R}$

Normalenvektor $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} -30 \\ -54 \\ -45 \end{pmatrix}$; Normalenform: $\begin{pmatrix} -30 \\ -54 \\ -45 \end{pmatrix} \circ \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 0$

$E: \ -30x_1 - 54x_2 + 5 \cdot 54 - 45x_3 = 0 \ / \ : (-3)$

$\boxed{E: \ 10x_1 + 18x_2 + 15x_3 - 90 = 0}$ (Koordinatenform)

→ Buch S. 173 – 178 (Band 2) Aufg. S. 175/1,2,3,5

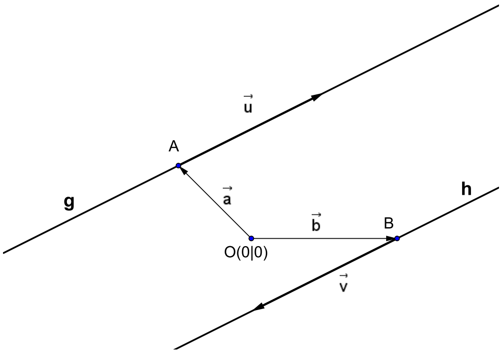
Lage von Geraden und Ebenen im Koordinatensystem:

→ Buch S. 179–185 (Band 2) Aufg. S. 182 u. S. 186 Aufg. S. 188/14,15 u. S. 189/21,22,24

5.3 Lagebeziehungen, Schnittwinkel und Abstände

5.3.1 Lagebeziehung von Geraden

1. **Parallele Geraden**



Die Geradengleichungen lauten:
$g:\ \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u}\ ,\ \lambda \in \mathbb{R}$ und
$h:\ \vec{x} = \vec{b} + \mu \cdot \vec{v}\ ,\ \mu \in \mathbb{R}$

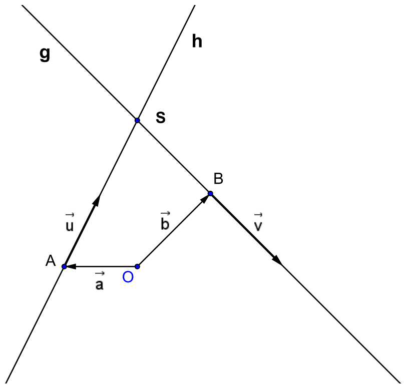
Paralelle Geraden

Zwei Geraden g und h sind genau dann *parallel*, wenn ihre Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ linear abhängig sind. D. h. wenn gilt: $\vec{u} = k \cdot \vec{v}$.
Gilt zusätzlich $A \in h$ bzw. $B \in g$, so sind die beiden Geraden *identisch*.

Beispiel: $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}\ ,\ h:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}-1\\-0{,}5\\1{,}5\end{pmatrix}$ [Selbst nachrechnen]

▶ http://youtu.be/ySJjPcgzimM

2. **Sich schneidende Geraden**



Die Geradengleichungen lauten diesmal:
$h:\ \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u}\ ,\ \lambda \in \mathbb{R}$
$g:\ \vec{x} = \vec{b} + \mu \cdot \vec{v}\ ,\ \mu \in \mathbb{R}$
Für den Schnittpunkt S gilt: $S \in g \wedge S \in h$.
Also gilt: $\vec{s} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u} = \vec{b} + \mu \cdot \vec{v}$
Der Ansatz führt auf ein Gleichungssystem mit zwei Unbekannten, nämlich λ und μ.

Beispiel: $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} \quad , \quad h:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 14 \\ -8 \\ 17 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$

Gleichsetzen und umstellen:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 14 \\ -8 \\ 17 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} \\ \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 14-2 \\ -8-1 \\ 17+3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

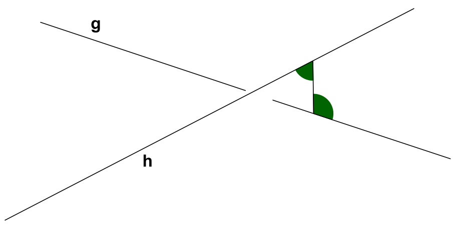
Man erhält ein überbestimmtes LGS (zwei Unbekannte und drei Gleichungen):

$$\begin{array}{cccccl|l} \text{I)} & 5\lambda & -2\mu & = & 12 & \\ \text{II)} & -2\lambda & +5\mu & = & -9 & 2\cdot I) + 5\cdot II) \\ \text{III)} & 8\lambda & -4\mu & = & 20 & 8\cdot I) - 5\cdot III) \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{cccccl|l} \text{I)} & 5\lambda & -2\mu & = & 12 & \\ \text{II)} & & 21\mu & = & -21 & \rightarrow \mu = -1 \\ \text{III)} & & 4\mu & = & -4 & \rightarrow \mu = -1 \end{array}$$

$\mu = -1$ in h einsetzen: $\boxed{S(12|-3|13)}$

Schnittwinkel von g und h: $\varphi = 36{,}5°$, denn $\cos(\varphi) = \dfrac{\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}}{\sqrt{5^2+(-2)^2+8^2} \cdot \sqrt{2^2+(-5)^2+4^2}}$

3. **Windschiefe Geraden** (nur im $\mathbb{R}^3$)



Windschiefe Geraden sind nicht parallel zueinander und haben keinen Schnittpunkt gemeinsam.

Beispiel: $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},\ \lambda \in \mathbb{R} \quad , \quad h:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix},\ \mu \in \mathbb{R}$

Offensichtlich gilt: $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \neq k \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, also sind die Geraden nicht parallel.

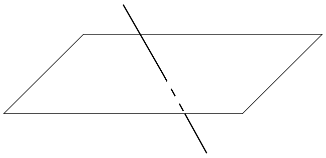
Die Nichtexistenz des Schnittpunktes wird über das Gleichsetzen der beiden Geradengleichungen nachgewiesen (das zugehörige LGS hat keine Lösung).

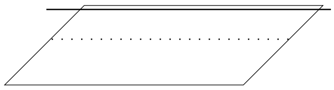
→ Buch S. 194 – 197 (Band 2)

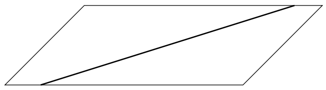
Aufg. S. 198/1,2,3,6

▶ http://youtu.be/2wC6AXoAQfc

5.3.2 Lagebeziehung Gerade-Ebene







Gerade schneidet Ebene — Gerade echt parallel zur Ebene — Gerade liegt in der Ebene

LGS genau eine Lösung — LGS keine Lösung — LGS unendl. viele Lösungen

<u>**Beispiel** 1</u>: $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + k\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}, \quad E:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\2\\2\end{pmatrix} + m\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + n\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$

Die drei Richtungsvektoren sind linear unabhängig. Deshalb schneidet die Gerade g die Ebene E.

Gleichsetzen: $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + k\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\2\\2\end{pmatrix} + m\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + n\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$

Umstellen: $k\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix} + m\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix} + n\begin{pmatrix}-1\\1\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$

LGS:
$$\begin{array}{lrrrcl} \text{I)} & k & -m & -n & = & 3 \\ \text{II)} & & & n & = & 0 \\ \text{III)} & 3k & -m & -3n & = & 1 \end{array}$$

Genau eine Lösung: $k = -1\ ;\ m = -4\ ;\ n = 0$

Schnittpunkt berechnen: $k = -1$ in g einsetzen: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix}$; $\underline{\underline{S(0|2|-2)}}$

<u>**Beispiel** 2</u>: $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\-11\end{pmatrix} + k\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad E:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + m\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} + n\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

Die drei Richtungsvektoren sind linear abhängig.

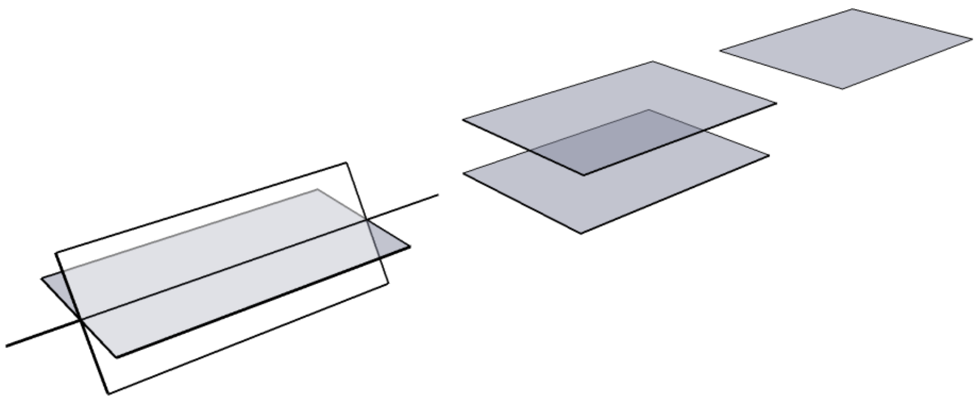
Es gibt zwei Möglichkeiten: **(a)** g ist (echt) parallel zu E oder **(b)** g liegt in E.

Der Verbindungsvektor der Aufpunkte $\begin{pmatrix}1-1\\2-1\\-11-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\-12\end{pmatrix}$ und die beiden Richtungsvektoren der Ebene E sind linear unabhängig.
Also: <u>g ist parallel zu E</u>!

→ Buch S. 199–203 (Band 2)

Aufg. S. 204 – 205

5.3.3 Lagebeziehung Ebene-Ebene



Ebenen schneiden sich in Gerade Ebenen sind echt parallel Ebenen sind identisch

Beispiel: $E_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad E_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Gleichsetzen, umstellen liefert: $s = 2r$ in E_2

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2r \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Die beiden Ebenen schneiden sich in der Geraden $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \quad , \quad r \in \mathbb{R}$

→ Buch S. 206 – 216 (Band 2) Aufg. S. 217–218

5.3.4 Winkelberechnungen

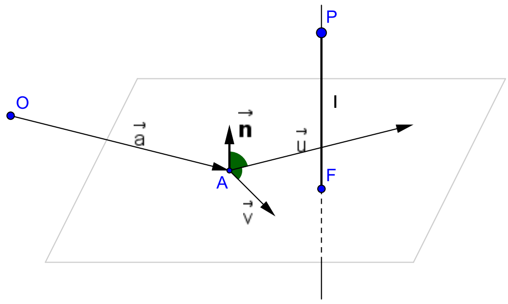
Gerade – Gerade, Ebene – Ebene, Gerade – Ebene

→ Buch S. 219 –223 (Band 2) Aufg. S. 224

5.3.5 Abstandsberechnungen

Abstand Punkt-Ebene

Beispiel: $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad P(7|0|-3)$



1. Normalenvektor $\vec{n}$ zur Ebene E

   $\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

2. Lotgerade l zu E durch P

   $l: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

3. Lotfußpunkt F aus Schnitt von l mit E

   Ansatz: $\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

   Lösung: $F(3|0|1)$

4. Abstand ist Länge von Verbindungsvektor $\overrightarrow{PF}$

   $\overrightarrow{PF} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

   $d(P,E) = |\overrightarrow{PF}| = \sqrt{(-4)^2 + 0^2 + 4^2} = \underline{\underline{4\sqrt{2}}}$

→ Buch S. 225– 230 (Band 2) Aufg. S. 234/1,4,5 ▶ http://youtu.be/QOMo3K5QcMw

Abstand Punkt-Gerade

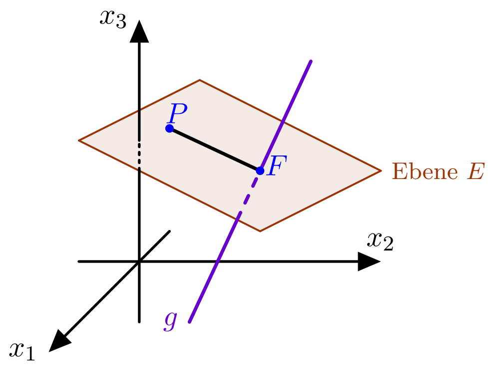
Beispiel: $P(5|4|0) \quad ; \quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

1. *Hilfsebene E senkrecht zu g durch P*

   Normalenvektor von E ist Richtungsvektor von g: $\quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

   $E: \ \vec{n} \circ (\vec{x} - \vec{p}) = 0$

   $E: \ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 - 5 \\ x_2 - 4 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \quad ; \quad E: \ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 13 = 0$



2. *Punkt F aus Schnitt E mit g*

   g in E:
   $(2 + k) + 2 \cdot (1 + 2k) + 2 \cdot (2k) - 13 = 0$
   Lösung: $k = 1 \quad ; \quad F(3|3|2)$

3. *Abstand ist Länge von $\overrightarrow{PF}$*

   $d(P, g) = |\overrightarrow{PF}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = \underline{\underline{3}}$

Aufg. S. 234/2,9,11 Aufg. S. 235 – 238

Kurzreferenz

Ortsvektor $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$. Anfangspunkt ist immer Ursprung 0.

Verbindungsvektor $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ (Spitze minus Fuß)

Länge Vektor $|\overrightarrow{OA}| = \left|\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

Mittelpunkt Strecke $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$

Skalarprodukt $\overrightarrow{OA} \circ \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$

Winkel zwischen Vektoren $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{OA} \circ \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}|}$

Senkrechte Vektoren $\overrightarrow{OA} \circ \overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$

Vektorprodukt $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{OC}$. $\quad \overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{OB}$

Parallele Vektoren $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \parallel \overrightarrow{OB}$

Spatprodukt $\overrightarrow{OA} \circ (\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC}) =$ Volumen des Parallelflachs

3 Linear unabhängige Vektoren Spatprodukt $\neq 0$. Vektoren bilden Basis des $\mathbb{R}^3$

3 Linear abhängige Vektoren Spatprodukt $= 0$. Vektoren liegen alle in einer Ebene.

Volumen Tetraeder $\frac{1}{6}\cdot$ Spatprodukt

Fläche Parallelogramm $|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}|$. Länge des Flächennormalenvektors.

Fläche Dreieck $\frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}|$

Schwerpunkt Dreieck $\overrightarrow{OS} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$

Gerade im $\mathbb{R}^3$ $g: \ \vec{x} = \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \overrightarrow{AB}\ ;\ \lambda \in \mathbb{R}$

Ebene im $\mathbb{R}^3$ $E: \ \vec{x} = \overrightarrow{OA} + \mu \cdot \overrightarrow{AB} + \sigma \cdot \overrightarrow{AC}\ ;\ \mu, \sigma \in \mathbb{R}$ (Parameterform)

$E: \ ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0$ (Normalenform). Normalenvektor: $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

Ist $d = 0$, so verläuft die Ebene durch den Ursprung.

Ebene: Parameterform $\rightarrow$ Normalenform Normalenvektor: $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.
$E: \ \vec{n} \circ (\vec{x} - \overrightarrow{OA}) = 0$

Ebene: Normalenform → Parameterform Aufpunktvektor $\overrightarrow{OA} \in E$

z.B. $E: 2x_1 + x_2 - 3x_3 - 4 = 0$. Setze $x_2 = 0$ und $x_3 = 0$, dann $x_1 = 2$ damit Gleichung erfüllt. Also $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Richtungsvektoren müssen senkrecht zu $\vec{n}$ sein. Alle zu $\vec{n}$ senkrechten Vektoren liegen automatisch in der Ebene E.

Vorgehensweise: Von $\vec{n}$ eine Komponente 0 setzen, die anderen beiden vertauschen und ein Vorzeichen wechseln.

Abstand Punkt–Ebene Lotgerade l zu Ebene E durch Punkt P. Schnittpunkt F von l mit E. Abstand ist Länge von Verbindungsvektor $|\overrightarrow{FP}|$

Abstand Punkt – Gerade Ebene durch P mit Richtungsvektor von Gerade als Normalenvektor. Schnitt Ebene mit Gerade. Länge Verbindungsvektor von P zu Schnittpunkt ist Abstand.

Schnitt Ebene – Ebene (Parameterform u. Normalenform) Koordinaten der Ebene in Parameterform zeilenweise lesen und in zweite Ebenengleichung (Normalenform) einsetzen. Nach einem Parameter auflösen und in erste Ebene (Parameterform) einsetzen.

Bsp: $E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad E_2: x_1 + x_2 + x_3 - 2 = 0$

Einsetzen: $(1 + \lambda + 3\mu) + (2\lambda + 2\mu) + 3\lambda + \mu - 2 = 0 \quad ; \quad \lambda = \frac{1}{6} - \mu$ in E_1:

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (\frac{1}{6} - \mu) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ;$ Zusammenfassen: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1\frac{1}{6} \\ 1/3 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

Schnitt Ebene – Ebene (beide Normalenform) Eine Ebene in Parameterform umwandeln. Lösung siehe Schnitt Ebene – Ebene (Parameterform u. Normalenform).

Schnitt Gerade – Ebene Koordinaten der Gerade zeilenweise lesen und in Ebene (Normalenform) einsetzen. Parameter λ berechnen. In Gerade einsetzen: Schnittpunkt.

Parallele Geraden Nachweis: $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$

Abstand des Aufpunkts einer Geraden zur anderen Geraden (siehe Abstand Punkt – Gerade).

Schnitt Gerade – Gerade Gleichsetzen. LGS: 1 Lösung: Schnittpunkt, Unendl. viele Lsgen: Geraden sind identisch, keine Lösung: Geraden sind windschief oder parallel.

Windschiefe Geraden $\vec{u} \times \vec{v} \neq \vec{0}$ und es gibt keinen Schnittpunkt (siehe Schnitt Gerade – Gerade)

Spiegeln Punkt an Ebene Lotgerade l zu E durch P. l in E einsetzen: λ. Doppelten Wert von λ in l einsetzen: Ortsvektor von P^*.