Staatliche Berufsoberschule Nürnberg

Daniel Körner: koerner@bos-n.de

Webinar am 11. April 2020

Analytische Geometrie: Geraden und Ebenen im $\mathbb{R}^3$

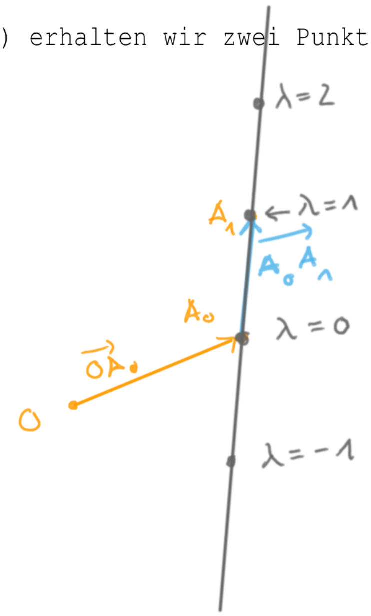
1. In einem Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ liegen die Punkte $A_k(1-k|1|k)$ mit $k \in \mathbb{R}$ auf einer Geraden g.

1.1 Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden g.

Für zwei verschiedene Werte von k (z.B. $k=0$ und $k=1$) erhalten wir zwei Punkte, die auf der Geraden g liegen:

$k=0: \qquad A_0(1|1|0)$

$k=1: \qquad A_1(0|1|1)$

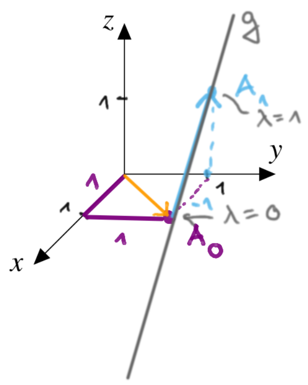


Geradengleichung:

$$g: \vec{x} = \underbrace{\overrightarrow{OA_0}}_{\text{Aufpunktvektor}} + \lambda \cdot \underbrace{\overrightarrow{A_0A_1}}_{\text{Richtungsvektor}}$$

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0-1 \\ 1-1 \\ 1-0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \lambda \in \mathbb{R}}$$

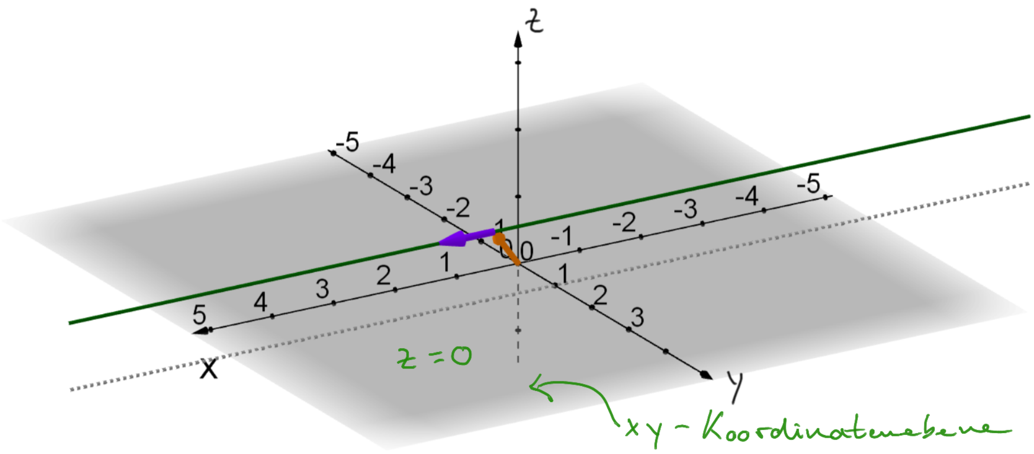


1.2 Untersuchen Sie die Gerade g auf ihre spezielle Lage zum Koordinatensystem und geben Sie die spezielle Lage an.

Spezielle Lagen von Geraden zum Koordinatensystem beziehen sich auf die mögliche Parallelität der Gerade zu einer der drei Koordinatenachsen oder zu einer der drei Koordinatenebenen.

Beispielsweise wäre die Gerade mit der Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ parallel zur x-Achse.

Veranschaulichung:



Die hier vorliegende Gerade g ist parallel zur xz-Koordinatenebene (zugehörige Gleichung dieser Ebene: $y = 0$).

Berechnet man die Spurpunkte (Schnittpunkte mit den Koordinatenebenen) der Geraden g, so fällt gleich auf, dass mit der xz-Ebene kein gemeinsamer Punkt existiert und die Gerade auch nicht parallel zu einer der Achsen verläuft.

Zur Berechnung der Spurpunkte:

Die Gleichung der Geraden g lässt sich auch zeilenweise getrennt nach den Koordinaten aufschreiben, da $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ gilt:

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zeilenweise gelesen heißt das:

$x = 1 + \lambda \cdot (-1)$; $y = 1 + \lambda \cdot 0$; $z = 0 + \lambda \cdot 1$

Spurpunkt mit der xy-Koordinatenebene: $z = 0$ in $z = 0 + \lambda \cdot 1$ einsetzen:

$\lambda = 0$ Einsetzen in g: $S_{xy}(1|1|0)$

Spurpunkt mit der xz-Koordinatenebene: $y = 0$ in $y = 1$ einsetzen:

$0 = 1$ Falsche Aussage. Also gibt es keinen Spurpunkt mit der xz-Koordinatenebene.

$x = 0$

Spurpunkt mit der yz-Koordinatenebene: $S_{yz}(0|1|1)$

$\cancel{x}\,0 = 1 + \lambda \cdot (-1)$

$0 = 1 - \lambda \quad | + \lambda$

$\lambda = 1$ in g

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{Die Gerade } g \text{ verläuft parallel zur } xz\text{-Koordinatenebene.}}$

1.3 Stellen Sie die Gleichung einer Ebene E in Parameterform und in Koordinatenform auf, die die Gerade g enthält und durch den Punkt $P(1|0|0)$ verläuft.

Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

Da die Ebene E die Gerade g enthalten soll, kann man deren Aufpunktsvektor und Richtungsvektor übernehmen. Für die Ebene E fehlt nur noch ein zweiter Richtungsvektor $\vec{v}$.

Zweiter Richtungsvektor $\vec{v}$ aus dem Verbindungsvektor zwischen dem Aufpunkt von g und dem gegebenen Punkt P:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix}1-1\\1-0\\0-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \overrightarrow{PA_0}$$

$$\overrightarrow{A_0P} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA_0} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$$

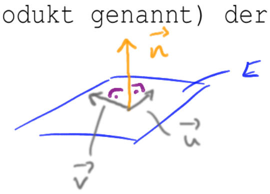
Ebene E in Parameterform:

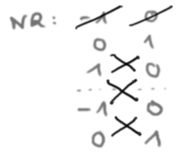
$$\boxed{E: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad s,t \in \mathbb{R}}$$

Ebene E in Koordinatenform umwandeln:

Aufstellen des Normalenvektors $\vec{n}$, der senkrecht zur Ebene verläuft.

Der Vektor $\vec{n}$ wird über das Vektorprodukt (auch Kreuzprodukt genannt) der beiden obigen Richtungsvektoren der Ebene E berechnet:





$$\vec{n} = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\cdot 0 - 1\cdot 1\\ 1\cdot 0 - (-1)\cdot 0\\ -1\cdot 1 - 0\cdot 0\end{pmatrix}$$

Wir verwenden die Normalenform einer Ebene, um zur Koordinatenform zu gelangen:

Normalenform [Merkhilfe]: $\quad \vec{n} \circ (\vec{x} - \vec{a}) = 0$

$$E: \begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix} \circ \left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \right) = 0$$

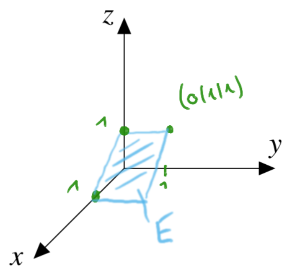
Auflösen der Klammern unter Anwendung des Skalarprodukts:

$$-1 \cdot (x-1) + 0 \cdot (y-1) - 1 \cdot (z-0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -x + 1 - z = 0$$

Umstellen der Gleichung liefert: $\quad 1 = x + z$

Ebene E in Koordinatenform: $\quad \boxed{E: \quad x + z = 1}$

1 0 1 $\rightsquigarrow$ $\vec{n}^* = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$



$x = 0: \quad 0 + z = 1$

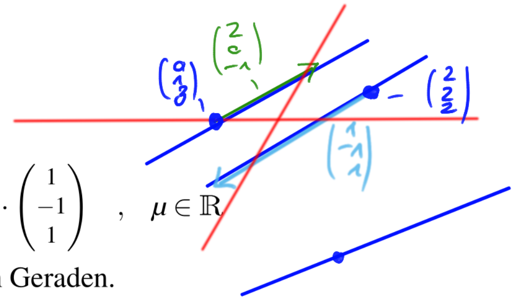
$z = 0: \quad x = 1$

$y = 0: \quad x + z = 1$

$(0|1|1): \quad 0 + 1 = 1$ ✓

$(0{,}5|0|0{,}5):$

2. Gegeben sind die beiden Geraden h und i im $\mathbb{R}^3$:



$$h:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix} \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad ; \quad i:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \quad , \quad \mu \in \mathbb{R}$$

Untersuchen Sie rechnerisch die gegenseitige Lage der beiden Geraden.

Prinzipiell können zwei Geraden im $\mathbb{R}^3$ **(1)** echt parallel zueinander sein, **(2)** identisch sein, **(3)** sich in einem Punkt schneiden oder **(4)** windschief zueinander verlaufen.

Zur Bestimmung der gegenseitigen Lage zweier Geraden, überprüft man die obigen Möglichkeiten.

(1) Echte Parallelität ist möglich, wenn die beiden Richtungsvektoren gleich oder Vielfache voneinander sind.

Ansatz: $\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$

Dies ergibt zeilenweise drei Gleichungen für k: $2 = k$, $0 = -k$ und $-1 = k$

Es ergeben sich drei verschiedene Werte für k. Also sind die Richtungsvektoren keine Vielfache voneinander und damit können die Geraden nicht parallel (1) oder identisch (2) sein.

(3) Schneiden sich die Geraden?

Ansatz für $h \cap i$: $\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$

Berechnung:

I) $0 + 2\lambda = 2 + \mu$

II) $1 = 2 - \mu \rightarrow \boxed{\mu = 1}$ in I) $2\lambda = 2 + 1$, $\boxed{\lambda = 1{,}5}$ $\Big\}$ $\mu = 1, \lambda = 1{,}5$ in III

III) $3 - \lambda = 2 + \mu$

III) $3 - 1{,}5 = 2 + 1$

$1{,}5 = 3$ (f) $\Rightarrow$ h schneidet i nicht

Also schneiden sich die Geraden nicht!

Damit bleibt Option **(4)** übrig. Die Geraden sind windschief zueinander.

Die Geraden h und i verlaufen **windschief** zueinander.

L ö s u n g in Kurzform

1.

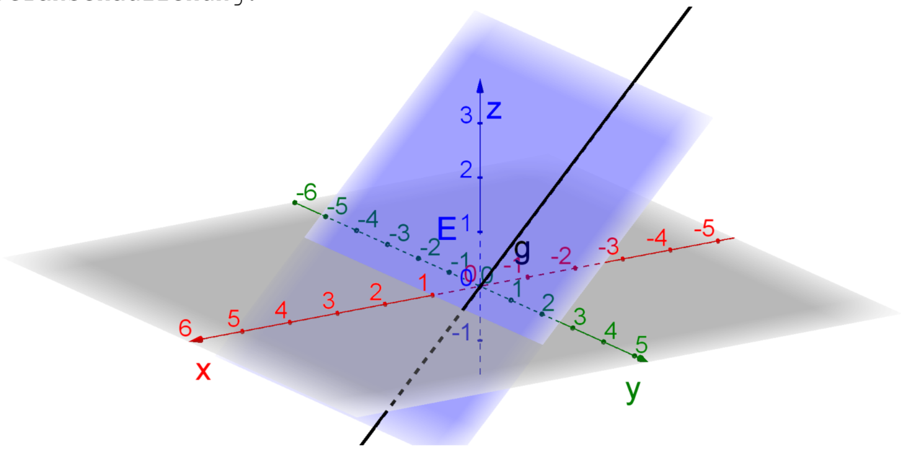
1.1 Geradengleichung: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $k \in \mathbb{R}$

1.2 Die Gerade verläuft parallel zur xz-Koordinatenebene, da bei dieser Koordinatenebene kein Durchstoßpunkt existiert.

1.3 Ebene in Parameterform: $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $s, t \in \mathbb{R}$

Ebene in Koordinatenform: $E: x + z = 1$

Veranschaulichung:



2. Die beiden Geraden verlaufen **windschief** zueinander, da sie weder parallel sind noch sich in einem Punkt schneiden.

Veranschaulichung: